J. DIFFERENTIAL GEOMETRY
2 (1968) 33-40

SUR L'ESPACE DE PROLONGEMENT DIFFÉRENTIABLE

NGÔ VAN QUÊ

Si V est une variété (différentiable C^∞), nous désignerons par $\mathcal{O}$ son faisceau structural de fonctions et par T son fibré tangent. Dans la suite nous supposerons connue la notion de groupoide de Lie dont V est l'espace des unités et d'espace fibré associé [1], [4]. Le but de ce travail est de démontrer que tout espace fibré vectoriel (différentiable) de prolongement d'une variété V est, du moins lorsque V est compact, un espace de prolongement infinitésimal d'un certain ordre k au sens de C. Ehresmann, i.e. associé au groupoide de Lie Π^k des jets d'ordre k des difféomorphismes locaux de V. Ce résultat est essentiellement basé sur le théorème de J. Peetre [5], qui donne la caractérisation des opérateurs différentiels linéaires.

Je suis heureux de reconnaitre que dans ce travail je dois beaucoup à une discussion détaillée avec les professeurs M. Kuranishi et D. C. Spencer.

1. Le faisceau de R-algèbre de Lie d'un groupoide de Lie

Soit Φ un groupoide de Lie dont V est l'espace des unités. Pour tout point x de V, Φ_x est l'ensemble des éléments de Φ de source x. Rappelons que Φ_x est un espace fibré principal sur V à groupe structural de Lie, le groupe d'isotropie G_x en x de Φ. Et nous avons la suite exacte d'Atiyah de fibrés vectoriels sur V

$$0 \longrightarrow I(\Phi) \longrightarrow A(\Phi_x) \xrightarrow{b} T \longrightarrow 0 ,$$

où $I(\Phi)$ est le fibré en algèbres de Lie d'isotropie de Φ et $A(\Phi_x)$ est le fibré vectoriel dont le faisceau des sections $\underline{A(\Phi_x)}$ est le faisceau défini sur V des champs de vecteurs de Φ_x invariants par l'action à droite du groupe structural G_x. Il est immédiat de constater que le crochet des champs de vecteurs définit canoniquement sur le faisceau $\underline{A(\Phi_x)}$ une structure de faisceau de R-algèbre de Lie telle que la suite exacte d'Atiyah définisse, si nous en considérons les faisceaux de sections, une suite exacte de faisceaux de R-algèbre de Lie, le faisceau $\underline{T}$ étant muni du crochet des champs de vecteurs. Comme le fibré $A(\Phi_x)$ est en fait défini indépendamment du choix du point de base x (i.e. pour tout autre point y de V, il existe un isomorphisme canonique de fibrés

Communicated by A. Lichnerowicz, September 20, 1967. This work was supported by NSF grant GP-5855.

vectoriels de $A(\Phi_y)$ sur $A(\Phi_x)$, qui est aussi un isomorphisme de faisceaux de R-algèbre de Lie) nous noterons simplement par $A(\Phi)$ le fibré vectoriel $A(\Phi_x)$ et nous appellerons le faisceau $\underline{A(\Phi)}$ le faisceau de R-algèbre de Lie du groupoide de Lie Φ.

Exemples.

1 (voir [4]). Si Π^k est le groupoide de Lie de tous les jets d'ordre k des difféomorphismes locaux de V, le fibré $A(\Pi^k)$ n'est autre que le fibré vectoriel $J_k(T)$ des jets d'ordre k des sections de T et la structure de faisceau de R-algèbre de Lie de $A(\Pi^k)$ est celle de $J_k(T)$ définie par le crochet suivant

$$[j^kX, fj^kY] = fj^k[X, Y] + (X\cdot f)j^kY \ ,$$

où $X\cdot f$ est la dérivée de la Lie de la fonction (différentiable) f par le champ de vecteurs X et $[X, Y]$ est le crochet connu des champs de vecteurs X et Y.

2 (a comparer avec [2]). Si E est un espace fibré vectoriel sur V, $\Pi(E)$ désigne le groupoide de Lie de tous les isomorphismes linéaires de fibres sur fibres de E. Le faisceau $\underline{A(\Pi(E))}$ n'est autre que le faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur V de tous les opérateurs différentiels D d'ordre 1 de E dans E, tels que leur symbole étant une section de $E\otimes E^*\otimes T$, soit de la forme $Id\otimes X$, où Id est la section "identité" de $E\otimes E^*$, ou encore de façon plus précise, des opérateurs différentiels D de E dans E tels que pour toute section s de E et toute fonction f sur V, on ait

$$D(fs) = (X\cdot f)s + fD(s) \ ,$$

le champ de vecteurs X étant $b(D)$ dans la suite exacte d'Atiyah. La structure de R-algèbre de Lie de $\underline{A(\Pi(E))}$ est alors définie par le commutateur des opérateurs différentiels

$$[D, D] = D\circ D' - D'\circ D \ .$$

3. Si Φ est le groupoide de Lie trivial, i.e. la variété produit $V\times G\times V$, avec G un groupe de Lie, et munie de la loi de composition partielle

$$(z, u, y)\cdot(y, u', x) = (z, u\cdot u', x) \ ,$$

le faisceau $\underline{A(\Phi)}$ est le faisceau de $\mathcal{O}$-modules sur V des couples (g, X) où X est un champ local de vecteurs, et g une fonction locale sur V à valeurs dans l'algèbre de Lie de G. La structure de R-algèbre de Lie de $\underline{A(\Phi)}$ est alors définie par le crochet suivant

$$[(g, X), (g', Y)] = ([g, g'] + X\cdot g' - Y\cdot g, [X, Y]) \ ,$$

où les notations sont habituelles, par exemple $X\cdot g'$ désigne la dérivée de Lie de la fonction g' par le champ de vecteurs X, et $[g, g']$ est la nouvelle fonction de V à valeurs dans l'algèbre de Lie de G définie de façon canonique à partir de g et g' par le crochet dans l'algèbre de Lie de G.

2. Théorème de représentation pour les groupoides de Lie

Soient Φ et Φ' deux groupoides de Lie ayant la même variété V comme espace des unités. Nous avons la notion bien connue de représentation (ou foncteur, dans la terminologie de C. Ehresmann) de Φ dans Φ' [1], [4]. Une représentation est une application différentiable R de Φ dans Φ', qui soit aussi un morphisme d'espaces fibrés sur $V \times V$, i.e.

$$a \circ R = a\ , \qquad b \circ R = b\ ,$$

a et b étant respectivement l'application source et but de Φ et Φ' sur V, et telle que si z et z' sont deux éléments de Φ dont la composition $z' \cdot z^{-1}$ est définie, on ait

$$R(z' \cdot z^{-1}) = R(z') \cdot R(z)^{-1}\ .$$

Il est cependant nécessaire d'introduire la définition suivante:

Définition de la représentation locale. Nous appellons représentation locale de Φ dans Φ' toute application différentiable R d'un voisinage U de l'espace des unités de Φ à valeurs dans Φ' telle que

1. si a et b sont respectivement application source et but de Φ et Φ', on ait $a \circ R = a$ et $b \circ R = b$;

2. si z et z' sont deux éléments de U, dont la composition $z' \cdot z^{-1}$ est aussi un élément de U, on ait

$$R(z' \cdot z^{-1}) = R(z') \cdot R(z)^{-1}\ .$$

Dans la suite, nous identifierons deux représentations locales définies respectivement sur les voisinages U et U' de l'espace des unités dans Φ, telles qu'elles induisent sur $U \cap U'$ une même représentation locale.

Définition de la représentation "infinitésimale". Une représentation infinitésimale $\mathscr{R}$ de Φ dans Φ' est un morphisme de faisceaux de $\mathscr{O}$-modules sur V de $\underline{A(\Phi)}$ dans $\underline{A(\Phi')}$ tel que

1. b étant le morphisme canonique de $\underline{A(\Phi)}$ et de $\underline{A(\Phi')}$ sur $\underline{T}$ dans la suite d'Atiyah, on ait $b \circ \mathscr{R} = b$;

2. $\mathscr{R}$ soit aussi un morphisme de faisceaux de R-algèbre de Lie sur V, i.e. si D et D' sont deux sections de $\underline{A(\Phi)}$ on ait

$$\mathscr{R}([D, D']) = [\mathscr{R}(D), \mathscr{R}(D')]\ .$$

Théorème. *Toute représentation locale de Φ dans Φ' induit une représentation infinitésimale. Et inversement toute représentation infinitésimale définit* *une et une seule représentation locale dont elle est la représentation infinitésimale induite.*

Démonstration. La première assertion est immédiate. Nous allons démontrer la deuxième assertion. Il suffit évidement de faire une étude locale. Soit donc $\mathscr{U}$ un ouvert simplement connexe de V, tel que l'ensemble des éléments de Φ (respectivement Φ') ayant source et but dans $\mathscr{U}$ forme un groupoide de Lie trivial $\mathscr{U} \times G \times \mathscr{U}$ (respectivement $\mathscr{U} \times G' \times \mathscr{U}$). Sur $\mathscr{U}$, le faisceau $\underline{A(\Phi)}$ (respectivement $\underline{A(\Phi')}$) est alors le faisceau de $\mathscr{O}$-modules des couples $\overline{(g, X)}$ où g est une fonction de $\mathscr{U}$ àvaleurs dans l'algèbre de Lie de G, et X, un champ de vecteurs sur $\mathscr{U}$ (respectivement (g', X) et G'); la représentation infinitésimale donnée est un morphisme de faisceaux de $\mathscr{O}$-modules

$$\mathscr{R}(g, X) = (r(g) + \omega(X), X) ,$$

tel que

$$\omega([X, Y]) = [\omega(X), \omega(Y)] + X \cdot \omega(Y) - Y \cdot \omega(X) , \tag{1}$$

$$r([g_1, g_2]) = [r(g_1), r(g_2)] , \tag{2}$$

$$r(X \cdot g) = X \cdot r(g) + [\omega(X), r(g)] . \tag{3}$$

a. La relation (l) s'écrit d'ailleurs simplement sous la forme classique

$$d\omega + [\omega, \omega] = 0 \quad \text{(Maurer-Cartan)},$$

où $d\omega$ est la différentielle extérieure de la forme ω de degré 1 sur $\mathscr{U}$ à valeurs dans l'algèbre de Lie de G'. D'après le théorème de Frobenius, $\mathscr{U}$ étant simplement connexe, pour tout point x de $\mathscr{U}$, il existe une et une seule application différentiable f

$$\begin{aligned} f : \mathscr{U} &\to G' , \\ y &\mapsto f(y, x) , \\ x &\mapsto f(x, x) = e' , \end{aligned}$$

élément neutre de G' telle que $\omega = f^{-1} \cdot df$ (notation classique). Et il est immédiat de constater que si z est un point quelconque de $\mathscr{U}$, la fonction

$$\begin{aligned} f' : \mathscr{U} &\to G' , \\ y &\mapsto f(y, z) \cdot f(x, z)^{-1} . \end{aligned}$$

a les mêmes propriétés que la fonction f relative au point x; donc par l'unicité, nous avons

$$f(y, x) = f(y, z) \cdot f(x, z)^{-1} . \tag{4}$$

b. L'application r peut être considérée comme une fonction sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans l'espace des applications linéaires de l'algèbre de Lie de G dans celle de G', telle que pour tout point x, la valeur r_x soit une représentation d'algèbre de Lie (condition (2)). Pour x fixé, la représentation r_x définit une et une seule représentation locale ρ_x du groupe de Lie G dans G', comme il est bien connu. Et nous noterons par W le voisinage de l'élément neutre dans G, sur lequel cette représentation locale est définie. Pour tout autre point y de $\mathcal{U}$ désignons par ρ_y la représentation locale de G dans G'

$$\begin{aligned} &\rho_y : W \to G' , \\ &\qquad u \mapsto f(y, x) \cdot \rho_x(u) \cdot f(y, x)^{-1} . \end{aligned} \tag{5}$$

c. Désignons par r' la fonction sur $\mathcal{U}$ à valeurs dans l'espace des applications linéaires de l'algèbre de Lie de G dans celle de G', dont la valeur r'_y pour tout point y de $\mathcal{U}$ est la représentation d'algèbres de Lie induite par la représentation locale ρ_y définie précédemment de groupes de Lie. Il est immédiat à montrer que cette fonction r' vérifie avec la fonction r donnée la même équation différentielle linéaire d'ordre 1, qu'est la condition (3). Mais alors d'après le théorème sur l'unicité de la solution d'un système différentiel linéaire d'ordre 1, ayant en un point la valeur initiale donnée, les fonctions r et r', ayant même valeur au point x, sont donc identiques.

Ces remarques étant faites, considérons l'application

$$\begin{aligned} &R : \mathcal{U} \times W \times \mathcal{U} \to \mathcal{U} \times G' \times \mathcal{U} , \\ &\qquad (y, u, x) \mapsto (y, f(y, x) \cdot \rho_x(u), x) , \end{aligned}$$

qui est une représentation locale de groupoides de Lie d'après les relations (4) et (5). Elle induit évidemment la représentation infinitésimale R donnée.

Remarque. Ce théorème montre, une fois de plus, la nécessité de considérer la notion de groupoide de Lie introduite par C. Ehresmann,qui est cependant équivalente à celle plus connue d'espace fibrés principaux à groupe structural de Lie. Il montre l'analogie entre groupoide de Lie et groupe de Lie (voir [4]); nous avons pu montrer par ailleurs l'existence d'une application Exp. de $A(\Phi)$ dans Φ, qui vérifie, dans un sens à préciser, l'analogue de la formule de Campbell-Hausdorff comme dans le cas des groupes de Lie.

3. Espace de prolongement différentiable et dérivation de Lie

Dans toute la suite, E désigne un espace fibré vectoriel (différentiable) sur V, dont p est la projection.

Définition de l'espace de prolongement différentiable. E est un espace de prolongement différentiable de V, si à tout f, difféomorphisme local de V de source U il correspond un morphisme $\bar{f}$ de fibrés vectoriels de $E|U$ $(=p^{-1}(U))$ dans $E|f(U)$, de telle maniere que

$$(6) \qquad p \circ \bar{f} = f \circ p \ , \quad \widetilde{Id}_U = Id_{E|U} \ , \quad \widetilde{f \circ g} = \bar{f} \circ \bar{g} \ ,$$

et tout groupe local de transformations sur V se relève ainsi en un groupe local de transformations sur E (condition de différentiabilité).

Pour la définition exacte de groupe local de transformations nous renvoyons le lecteur à la monographie de R. Palais [3]. Rappelons aussi que tout champ de vecteurs X sur V définit un groupe local de transformations à un paramètre sur V, que nous noterons Exp. tX, où t est le paramètre réel. Et si Y est un autre champ de vecteurs, nous avons

$$(7) \qquad \mathrm{Exp}\cdot tX \circ \mathrm{Exp}\cdot tY = \mathrm{Exp}\cdot (tX + tY + \frac{t^2}{2}[X, Y]) + 0(t^3)$$

(Campbell-Hausdorff),

$$(8) \qquad \begin{aligned} &\mathrm{Exp}\cdot(-tX) \circ \mathrm{Exp}\cdot(-tY) \circ \mathrm{Exp}\cdot tX \circ \mathrm{Exp}\cdot tY \\ &\quad = \mathrm{Exp}\cdot(t^2[X, Y]) + 0(t^3) \ . \end{aligned}$$

Si V est compact, $\mathrm{Exp}\cdot tX$ est en fait un groupe global de transformations à un paramètre. Nous allons supposer à partir de maintenant que V est compact, ce qui n'est en fait nullement nécessaire sauf dans la partie suivante où nous voulons appliquer le théorème de Peetre. Alors si s est une section de E, pour tout t

$$s_t = \widetilde{\mathrm{Exp}}\cdot(-tX) \circ s \circ \mathrm{Exp}\cdot tX$$

est une nouvelle section de E. Posons

$$\mathscr{L}(X)(s) = \lim_{t \to 0} \frac{s_t - s}{t} \ ,$$

cette limite étant définie d'après la condition de différentiabilité. $\mathscr{L}(X)(s)$ est une nouvelle section de E, qu'on appelle *la dérivée de Lie* de s par rapport au champ de vecteurs X. Il est immédiat de vérifier que tout champ de vecteurs X définit ainsi un opérateur différentiel d'ordre 1 de E dans E, tel que si f est une fonction sur V,

$$(9) \qquad \mathscr{L}(x)(fs) = (X\cdot f)s + f\mathscr{L}(X)(s) \ .$$

Et d'après les relations (7) et (8) précédentes, nous avons pour tout couple de champs de vecteurs X et Y

$$(10) \qquad \mathscr{L}(\alpha X + \beta Y) = \alpha\mathscr{L}(X) + \beta\mathscr{L}(Y) \ ,$$

α et β étant des nombres réels,

$$(11) \qquad \mathscr{L}(X) \circ \mathscr{L}(Y) - \mathscr{L}(Y) \circ \mathscr{L}(X) = \mathscr{L}([X, Y]) \ .$$

4. Théorème de prolongement infinitésimal

Prenons une section s de E et considérons l'opérateur $\mathscr{R}_s$ qui fait correspondre à tout champ de vecteurs X sur V la section $\mathscr{L}(X)(s)$. D'après les relations (9) et (10), cet opérateur est en fait un morphisme R-linéaire de faisceaux sur V:

$$\mathscr{R}_s : \underline{T} \to \underline{E} ,\qquad X \mapsto \mathscr{L}(X)(s) .$$

Comme V est supposé compact, $\mathscr{R}_s$ est donc d'après le théorème de J. Peetre un opérateur différentiel d'un certain ordre k de T dans E. En supposant que k est plus grand que 1, la relation (9) montre encore que l'opérateur différentiel $\mathscr{R}_{fs}$ est de même ordre k que $\mathscr{R}_s$ pour toute fonction f sur V. Et d'autre part, V étant compact, le module des sections de E est de type fini sur l'anneau des fonctions de V, i.e. il existe un nombre fini de sections s_i, telles que toute section s de E soit de la forme

$$s = f^i s_i .$$

Nous en concluons que pour toute section s de E, l'opérateur $\mathscr{R}_s$ est un opérateur différentiel d'ordre fixe k, en désignant par k la borne supérieure des ordres de $\mathscr{R}_{s_i}$. $\mathscr{R}_s$ définit donc un morphisme de fibrés vectoriels

$$\mathscr{R}_s : J_k(T) \to E .$$

La relation (8) montre encore que nous avons ainsi un morphisme de faisceaux de $\mathscr{O}$-modules sur V

$$\mathscr{R} : \underline{J_k(T)} \to \underline{A\,(\Pi(E))} ,\qquad \sigma \mapsto \mathscr{R}(\sigma) ,$$

où si nous considérons $\mathscr{R}(\sigma)$ comme un opérateur différentiel d'ordre 1 de E dans E (voir exemple 2 de § 1), nous avons

$$\mathscr{R}(\sigma) : \underline{E} \to \underline{E} ,\qquad s \mapsto \mathscr{R}_s(\sigma) .$$

Et il est facile de montrer que d'après la relation (11) de § 3, le morphisme $\mathscr{R}$ est aussi un morphisme de faisceaux de R-algèbre de Lie, les structures de faisceaux de R-algèbre de Lie de $\underline{J_k(T)}$ et de $\underline{A(\Pi(E))}$ étant respectivement définies dans l'exemple 1 de 2 de § 1. Ainsi nous avons démontré la proposition suivante

Proposition. *Si E est un espace fibré de prolongement différentiable de V,* *il est défini canoniquement une représentation $\mathscr{R}$ infinitésimale du groupoide de Lie Π^k des jets d'un certain ordre k des difféomorphismes locaux de V dans le groupoide de Lie $\Pi(E)$.*

Maintenant nous sommes en mesure de démontrer le théorème que nous avons en vue

Théorème. *Si E est un espace fibré de prolongement différentiable d'une variété compacte V, E est un espace de prolongement infinitésimal d'un certain ordre k de V.*

Demonstration. Il revient à dire qu'il existe une représentation de Π^k dans $\Pi(E)$. Or d'après la proposition précédente et le théorème de § 2, nous avons une représentation locale R de Π^k dans $\Pi(E)$, définie sur un voisinage U de l'espace des unités. Nous allons montrer que cette représentation locale admet une extension globale.

En effet, désignons par Π^λ le groupoide abstrait des germes des difféomorphismes locaux de V; si f est un difféomorphisme local défini sur un voisinage d'un point x de V, nous noterons $j_x^\lambda f$ son germe en x. La condition (6) de la définition de l'espace de prolongement différentiable veut dire aussi que nous avons une représentation ρ de Π^λ dans $\Pi(E)$, nécessairement telle que si $j_x^k f$ est dans U, on ait

$$\rho(j_x^\lambda f) = R(j_x^k f) .$$

Il reste à démontrer que plus généralement $\rho(j_x^\lambda f)$ ne dépend que du jet d'ordre k en x de f, ou si g est un autre difféomorphisme local tel que $j_x^k g = j_x^k f$, on a

$$\rho(j_x^\lambda g) = \rho(j_x^\lambda f) .$$

Or on a

$$\rho(j_x^\lambda g)^{-1} \cdot \rho(j_x^\lambda f) = \rho(j_x^\lambda g^{-1} \circ f)$$

et come $j_x^k g^{-1} \circ f = \hat{x}$, l'unité en x de Π^k, évidemment un élément de U,

$$\rho(j_x^\lambda g)^{-1} \cdot \rho(j_x^\lambda f) = \rho(j_x^\lambda g^{-1} \circ f) = R(j_x^k g^{-1} \circ f) = \hat{x} ,$$

unité en x de $\Pi(E)$.

Bibliographie

[1] C. Ehresmann, *Les prolongements d'uns variété différentiable. I-V,* C. R. Acad. Sci. Paris **233** (1951) 598–600, 777–779, 1081–1083; **234** (1952) 1028–1030, 1424–1425.

[2] H. K. Nickerson, *On differential operators and connections,* Trans. Amer. Math. Soc. **99** (1961) 509–539.

[3] R. Palais, *A global formulation of the Lie theory of transformation groups,* Mem. Amer. Math. Soc. No. 22, 1957.

[4] Ngô van Quê, *Du prolongement des espaces fibrés et des structures infinitésimales,* Ann. Inst. Fourier Grenoble **17** (1967) 157–223.

[5] J. Peetre, *Une caractérisation abstraite des opérateurs différentiels,* Math. Scand. **8** (1960) 116–120.

STANFORD UNIVERSITY